Terminales Spé Maths G1	interrogation n° 10 **CORRIGE**	le 17.04.2024

Exercice 1

Déterminer **une** primitive sur ℝ de chacune des fonctions f, g, h et m définies sur ℝ par les expressions suivantes :

$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 7$ $\quad \boldsymbol{F(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + x^3 + 7x}$

$g(x) = 15e^{5x+2}$ $\quad \boldsymbol{G(x) = 15 \times \frac{1}{3}e^{3x+2} = 5\, e^{3x+2}}$

$h(x) = \frac{6x}{3x^2+25}$ $\quad h \textit{ est de la forme } \frac{u'}{u} \textit{ avec } u(x) = 3x^2 + 2 \quad \textit{donc} \quad u'(x) = 6x$

$\textit{ainsi on a} \quad h = \frac{u'}{u}$

$\textit{donc une primitive de } h \textit{ est } H = \ln(u) \quad \textit{car } u(x) = 3x^2 + 2 > 0 \textit{ sur } \mathbb{R} \textit{ soit } \boldsymbol{H(x) = \ln(3x^2 + 2)}$

$m(x) = 12xe^{1+x^2}$ $\quad$ forme $u'e^u$ avec $u(x) = 1 + x^2$ donc $u'(x) = 2x$

or $m(x) = 12xe^{1+x^2} = 6 \times (2xe^{1+x^2})$ donc $m = 6u'e^u$

donc $M = 6e^u$ donc $\boldsymbol{M(x) = 6e^{1+x^2}}$

Exercice 2

Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_1^3 (3e^x + \frac{2}{x})dx$

$\mathrm{I} = \int_1^3 (3e^x + \frac{2}{x})dx = [\ 3e^x + 2lnx\ ]_1^3$

$= (3e^3 + 2\ln(3)) - (3e^1 + 2\ln(1))$

$\boldsymbol{= 3e^3 + 2\ln(3) - 3e}$

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur [2 ; 5] par $f(x) = 3x^2 - 2x$

Déterminer la valeur moyenne de f entre 2 et 5.

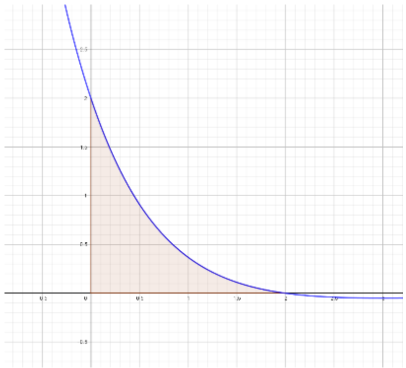
$$\mu = \frac{1}{5-2}\int_2^5 (3x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}[x^3 - x^2]_2^5$$

$$= \frac{1}{3}\left((5^3 - 5^2) - (2^3 - 2^2)\right)$$

$$= \frac{1}{3}(100 - 4)$$

$= \frac{1}{3} \times 96 = 32$ *donc la valeur moyenne de f sur [2 ; 5] est* $\mu = 32$

Exercice 4



Soit la fonction f définie sur ℝ par

$f(x) = (2-x)e^{-x}$

On donne ci-contre sa courbe représentative Cf et on note A l'aire du domaine coloré, délimité par la courbe Cf et les 2 axes du repère.

a/ Justifier que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses en 2

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-x)e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2 - x = 0 \quad ou \quad e^{-x} = 0$ impossible

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

donc Cf coupe l'axe des abscisses en 2

b/ Montrer que la fonction F définie sur ℝ par

F(x) =$(x-1)e^{-x}$ est une primitive de f

F est une primitive de f si $F'(x) = f(x)$ or $F = uv$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$

Alors $F'(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x-1) = e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x} = (2-x)e^{-x} = f(x)$

D'où F définie par $\boldsymbol{F(x) = (x-1)e^{-x}}$ est une primitive de f sur ℝ

c/ En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près de A

A est l'aire du domaine compris entre la courbe Cf , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ donc

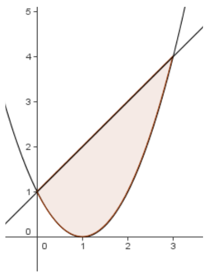
A = $= \int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0)$

$= (2-1)e^{-2} - (0-1)e^{-0}$

$= \boldsymbol{e^{-2} + 1 \quad u.a}$

$\approx \boldsymbol{1,135 \quad u.a}$

Exercice 5



Le graphique ci-contre donne la représentation graphique des fonctions f et g définies sur ℝ par

$f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$

On admet que les courbes Cf et Cg se coupent aux points d'abscisses 0 et 3.

Déterminer l'aire A du domaine compris entre ces 2 courbes.

f est une fonction affine, représentée par la droite et g est une fonction trinôme, représentée par la parabole

et d'après le graphique, Cf est au-dessus de Cg sur [0 ; 3] ,

Ainsi A = $\int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^3 \big((x+1) - (x^2 - 2x + 1)\big)dx = \int_0^3 (x + 1 - x^2 + 2x - 1)\,dx$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \times 3^3 + \frac{3}{2} \times 3^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \times 0^3 + \frac{3}{2} \times 0^2\right)$$

$$= \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} \quad \boldsymbol{u.a}$$

Exercice 6

A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$\text{I} = \int_1^3 4x ln(x)dx = \int_1^3 u'(x) \times v(x)dx$$

$$en\ posant\ \ u'(x) = 4x \quad et \quad v(x) = \ln(x)$$

$$alors \qquad u(x) = 2x^2 \qquad et \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

en appliquant la formule d'intégration par parties , $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

on obtient,

$$\text{I} = \int_1^3 4x ln(x)\, dx = [2x^2 \times \ln(x)\,]_1^3 - \int_1^3 2x^2 \times \frac{1}{x}\, dx$$

$$= (2 \times 3^2 \times \ln(3) - 2 \times 1^2 \times \ln(1)\ ) - \int_1^3 2x\, dx$$

$$= 18 \ln(3) - [x^2]_1^3$$

$$= 18 \ln(3) - (3^2 - 1^2)$$

$$= \mathbf{18 \ln(3) - 8}$$