Terminales Spé Maths G3 interrogation n° 10 **CORRIGE** le 18.04.2024

Exercice 1

Déterminer **une** primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f, g, h et m définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes :

$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 7$ $\quad \boldsymbol{F(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + x^3 + 7x}$

$g(x) = 15e^{5x+2}$ $\quad \boldsymbol{G(x) = 15 \times \frac{1}{5}e^{5x+2} = 3\ e^{5x+2}}$

$h(x) = \frac{5e^x}{e^x + 5}$ $\quad h \text{ est de la forme } \frac{u'}{u} \text{ avec } u(x) = e^x + 5 \quad \text{donc} \quad u'(x) = e^x$

or $h(x) = \frac{5e^x}{e^x + 5} = 5 \times \frac{e^x}{e^x+5}$ $\quad$ *ainsi on a* $h = 5 \times \frac{u'}{u}$

$\text{donc une primitive de } h \text{ est } H = 5\ln(u) \quad \text{car } u(x) = e^x + 5 > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ soit } H(x) = 5\ln(e^x + 5)$

$m(x) = 6xe^{1+3x^2}$ $\quad \boldsymbol{M(x) = e^{1+3x^2}}$ $\quad$ *car* $m = u'e^u$ *donc* $M = e^u$

Exercice 2

Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_1^3 \left(4x^2 - 2 + \frac{3}{x}\right)dx$

$$\mathrm{I} = \int_1^3 \left(4x^2 - 2 + \frac{3}{x}\right) dx = \left[\ \frac{4}{3}x^3 - 2x + 3\ln x\ \right]_1^3$$

$$= \left(\frac{4}{3} \times 3^3 - 2 \times 3 + 3\ln 3\right) - \left(\frac{4}{3} \times 1^3 - 2 \times 1 + 3\ln 1\right)$$

$$= 36 - 6 + 3\ln 3 - \left(\frac{4}{3} - 2 + 0\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{92}{3} + 3\ln 3}$$

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur [1 ; 6] par $f(x) = 6x^2 - 4x$

Déterminer la valeur moyenne de f entre 1 et 6.

$$\mu = \frac{1}{6-1}\int_1^6 (6x^2 - 4x)dx = \frac{1}{5}\ [2x^3 - 2x^2]_1^6$$

$$= \frac{1}{5}\left((2 \times 6^3 - 2 \times 6^2) - (2 \times 1^3 - 2 \times 1^2)\right)$$

$$= \frac{1}{5}(360)$$

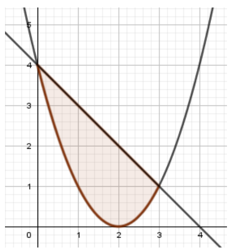
$= 72$ $\quad$ *donc la valeur moyenne de f sur [1 ; 6] est* $\mu = 72$

Exercice 4

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 4$ et $g(x) = x^2 - 4x + 4$

On admet que les courbes Cf et Cg se coupent aux points d'abscisses 0 et 3.

Déterminer l'aire A du domaine compris entre ces 2 courbes.



f est une fonction affine, représentée par la droite et g est une fonction trinôme, représentée par la parabole et d'après le graphique, Cf est au-dessus de Cg sur [0 ; 3] ,

Ainsi A = $\int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^3 \big((-x+4) - (x^2 - 4x + 4)\big)dx = \int_0^3 (-x + 4 - x^2 + 4x - 4))\,dx$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx$$

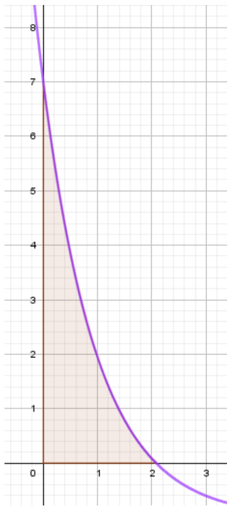
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \times 3^3 + \frac{3}{2} \times 3^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \times 0^3 + \frac{3}{2} \times 0^2\right)$$

$$= \frac{9}{2} \;\; u.a$$

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur ℝ par
$f(x) = 8e^{-x} - 1$
On donne ci-contre sa courbe représentative Cf et on note A l'aire du domaine coloré, délimité par la courbe Cf et les 2 axes du repère.



a/ Justifier que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses en ln (8)

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8e^{-x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{-x} = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \quad -x = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \quad -x = -\ln(8)$

$\Leftrightarrow \quad x = \ln(8)$ donc Cf coupe l'axe des abscisses en ln (8)

b/ Déterminer la valeur exacte de A puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

A est l'aire du domaine compris entre la courbe Cf , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(8)$ donc

A = $= \int_0^{\ln(8)} (8e^{-x} - 1)dx = [-8\,e^{-x} - x\,]_0^{\ln(8)}$

$$= \left(-8e^{-\ln(8)} - \ln(8)\right) - (-8e^{-0} - 0)$$

$$= \left(-8e^{\ln\left(\frac{1}{8}\right)} - \ln(8)\right) - (-8 \times 1)$$

$$= \left(-8 \times \frac{1}{8} - \ln(8)\right) + 8$$

$$= -1 - ln(8) + 8$$

$$= \mathbf{7 - ln(8)} \;\; \boldsymbol{u.a}$$

$$\approx \mathbf{4,92} \;\; \boldsymbol{u.a}$$

Exercice 6

A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale

I = $\int_0^5 (2x+3)e^x dx = \int_0^5 e^x \times (2x+3)\, dx = \int_0^5 u'(x) \times v(x) dx$

$en\ posant\ \ u'(x) = e^x \quad et \quad v(x) = 2x+3$

$alors \qquad u(x) = e^x \qquad et \quad v'(x) = 2$

en appliquant la formule d'intégration par parties , $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

on obtient,

I = $\int_0^5 e^x \times (2x+3)\, dx = [(2x+3)e^x]_0^5 - \int_0^5 2e^x dx$

= $\left((2\times 5+3)e^5 - (2\times 0+3)e^0\right) - [2e^x]_0^5$

= $13e^5 - 3 - (2e^5 - 2e^0)$

$= 13e^5 - 3 - 2e^5 + 2$

= $11e^5 - 1$