N° 34 p 29

1. $u_0 = 5$ car u_0 est le nombre d'habitants **en milliers** pour l'année 2020

2. D'une année à l'autre le nombre d'habitants diminue de 20 % donc il est multiplié par 0,8 puis il y a 1 200 nouveaux habitants, soit 1,2 milliers ainsi $\boldsymbol{u_{n+1} = 0,8u_n + 1,2}$

3. La suite semble croissante, il faut donc démontrer par récurrence que pour tout entier n,

$$u_{n+1} \geq u_n$$

Initialisation : On a $u_0 = 5$ et $u_1 = 0,8 \times 5 + 1,2 = 5,2$ donc $u_1 \geq u_0$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_{k+1} \geq u_k$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire, $u_{k+2} \geq u_{k+1}$

Or $u_{k+1} \geq u_k$

$\Leftrightarrow$ $0,8u_{k+1} \geq 0,8u_k$

$\Leftrightarrow$ $0,8u_{k+1} + 1,2 \geq 0,8u_k + 1,2$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+2} \geq u_{k+1}$ donc la propriété est héréditaire

Conclusion, la propriété est vraie pour n = 0 et elle est héréditaire

donc pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geq u_n$ ce qui prouve que la suite est croissante.

4. a. Il faut montrer que pour tout entier n, $u_n \leq 6$

Initialisation : On a $u_0 = 5$ donc , $u_0 \leq 6$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k \leq 6$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $u_{k+1} \leq 6$

Or $u_k \leq 6$

$\Leftrightarrow$ $0,8\, u_k \leq 6 \times 0,8$

$\Leftrightarrow$ $0,8\, u_k + 1,2 \leq 6 \times 0,8 + 1,2$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \leq 6$ donc la propriété est héréditaire

Conclusion, la propriété est vraie pour n = 0 et elle est héréditaire

donc pour tout entier n on a $u_n \leq 6$

b. Cela signifie que la population de cette ville restera toujours inférieure à 6 000 habitants (et ce bien que cette population soit en augmentation constante car la suite est croissante)