<u>n°67 p 34</u> $\quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \quad$ et $u_0 = 2$

1) a) $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3}\times 0 + 1 = \frac{2}{3}\times 2 + 1 = \frac{7}{3} \simeq 2,33$

$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}\times 1 + 1 = \frac{2}{3}\times\frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{9} \simeq 2,88$

$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}\times 2 + 1 = \frac{2}{3}\times\frac{26}{9} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{97}{27} \simeq 3,59$

$u_4 = \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3}\times 3 + 1 = \frac{2}{3}\times\frac{97}{27} + 1 + 1 = \frac{356}{81} \simeq 4,39$

b) (u_n) semble croissante

2. a) on souhaite démontrer que pour tout entier n, $u_n \leq n+3$

<u>initialisation</u> : pour $n=0$, $u_0 = 2$ donc $u_0 \leq 0+3$

<u>hérédité</u> : on suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $u_k \leq k+3$ et on cherche à démontrer que $u_{k+1} \leq k+1+3 \Leftrightarrow u_{k+1} \leq k+4$

or $u_k \leq k+3$ $\quad \big) \times \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}u_k \leq \frac{2}{3}(k+3)$ $\quad \big) + \frac{1}{3}k$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k \leq \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k$ $\quad \big) + 1$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leq k + 2 + 1$

$\Leftrightarrow u_{k+1} \leq k+3$ $\quad$ or $k+3 \leq k+4$

d'où $u_{k+1} \leq k+4$ $\quad$ la propriété est donc héréditaire

<u>conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire donc, pour tout entier n, $u_n \leq n+3$

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

$= \frac{1}{3}(-u_n + n + 3)$

or $u_n \leq n+3$ donc $n+3-u_n \geq 0$

ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante

3. $v_n = u_n - n$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$

$= \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

b) $v_n = v_0 \times q^n$ $\quad$ or $v_0 = u_0 - 0 = 2$ $\quad$ et $q = \frac{2}{3}$

donc $v_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

or $v_n = u_n - n$ $\quad$ donc $u_n = v_n + n$

ainsi $u_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$