n°69 p 336

1) Méthode vectorielle

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ}$

$= \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$ car $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$ car $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{IE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}) + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FC})$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} + \cancel{\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}} - \cancel{\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}}$ car $\overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FC} = -\overrightarrow{CF}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$

ou 2ème possibilité

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$ car $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$ (voir figure)

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE}) + \overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EG})$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{FG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} + \cancel{\frac{1}{3}\overrightarrow{GE}} + \cancel{\frac{1}{3}\overrightarrow{EG}}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$

n°69 p336

2) méthode analytique

a) Dans le repère $(G;\vec{GC},\vec{GH},\vec{GF})$ on a

$G(0;0;0)$ $C(1;0;0)$ $H(0;1;0)$ $F(0;0;1)$ $E(0;1;1)$ $I(0;\frac{2}{3};1)$ $J(\frac{2}{3};0;0)$

b) $\vec{IJ}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-0\\0-\frac{2}{3}\\0-1\end{pmatrix}$ $\vec{IJ}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{EC}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0-1\end{pmatrix}$ $\vec{EC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{FG}\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\0-1\end{pmatrix}$ $\vec{FG}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

c) $\vec{IJ}$, $\vec{EC}$ et $\vec{FG}$ sont coplanaires ssi il existe α et β tels que

$$\vec{IJ}=\alpha\vec{EC}+\beta\vec{FG}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{3}=\alpha\\-\frac{2}{3}=-\alpha\\-1=-\alpha-\beta\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2}{3}\\\alpha=\frac{2}{3}\\-1=-\frac{2}{3}-\beta\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2}{3}\\\beta=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}\end{cases}$$

on a alors $\vec{IJ}=\frac{2}{3}\vec{EC}+\frac{1}{3}\vec{FG}$

ce qui prouve que $\vec{IJ}$, $\vec{EC}$ et $\vec{FG}$ sont coplanaires.

remarques :
- la résolution du système est ici particulière car les 2 premières équations donnent la même valeur pour α, il suffit alors de déterminer la valeur de β grâce à la dernière équation
- avec $\alpha=\frac{2}{3}$ et $\beta=\frac{1}{3}$, on retrouve donc la relation obtenue avec la méthode vectorielle, c'est-à-dire $\vec{IJ}=\frac{2}{3}\vec{EC}+\frac{1}{3}\vec{FG}$