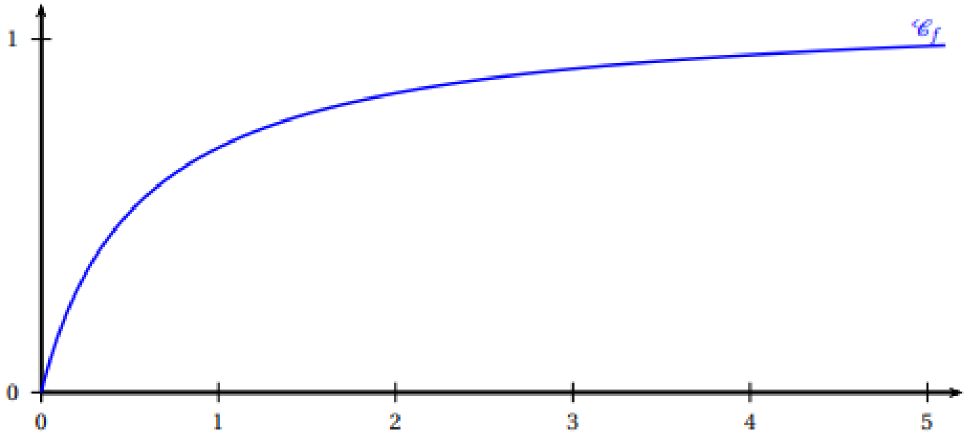
Exercice

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

   b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ où
$x_0 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}215$ et $g(x_0) \approx 0{,}088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0		x_0		$+\infty$
Variations de la fonction g			$g(x_0)$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).