Exercice 2 Partie A :

① en $+\infty$, on a une forme indéterminée.

→ on factorise : $\frac{3x+1}{x+1} = \frac{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ → 0

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{x+1} = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 3$.

→ on a une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 3$.

② avec les fonctions composées, on a :

$(\ln u)' = \frac{1}{u} \times u'$

avec $u' = \left(\frac{3x+1}{x+1}\right)' = \frac{3(x+1)-(3x+1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

(avec la formule du quotient)

Donc : $f'(x) = \frac{1}{\frac{3x+1}{\cancel{x+1}}} \times \frac{2}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{2}{(3x+1)(x+1)}$

(en simplifiant)

③ sur $[0;+\infty[$, $3x+1$ et $x+1$ sont des expressions positives.

Donc on a $f'(x) > 0$ → f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Partie B ① on calcule $U_1 = \ln\left(\frac{3\times U_0+1}{U_0+1}\right) = \ln\left(\frac{10}{4}\right) \approx 0{,}92$

$\boxed{\text{Initialisation}}$ on a $U_0 = 3$ et $U_1 \approx 0{,}92$

Donc on a bien $\frac{1}{2} \leq U_1 \leq U_0$.

$\boxed{\text{Hérédité}}$ on suppose $\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq U_n$

et on applique la fonction f qui est croissante et donc qui conserve l'ordre.

on obtient : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}51 \ \left(> \frac{1}{2}\right)$

$\rightarrow$ on a bien : $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < U_{n+2} < U_{n+1}$

soit $\frac{1}{2} < U_{n+2} < U_{n+1}$.

Partie C : ① on reconnait l'utilisation du TVI.

- g est décroissante et continue sur $[x_0 ; +\infty[$
- on a $g(x_0) \approx 0{,}088$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
- Le nombre 0 appartient à l'intervalle image $]-\infty ; g(x_0)]$
- D'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x_0)$ possède une unique solution dans $[x_0 ; +\infty[$.

(⚠ $g(0) = 0$ mais on veut ici une solution strictement positive)

② on obtient, à la calculatrice, $x \approx 0{,}53$

③ on sait que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$
en sachant que ℓ est strictement positive
Donc la limite ℓ correspond à α
$\rightarrow \ell \approx 0{,}53$.