Exercice 1 /

1) (b) 2) (c) 3) (b)

1) On a $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-6\\5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}12\\-4\\10\end{pmatrix}$

or $\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 0\alpha - 6\beta \\ -4 = 2\alpha + 5\beta \\ 10 = 4\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ -4 = 2\alpha + 5\times(-2) \\ 10 = 4\alpha - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 3 \\ \alpha = 3 \end{cases}$ ainsi $\vec{AD} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$ → réponse (b)

2) D'après 1), on en déduit que $D \in (ABC)$ donc que (AB) et (CD) sont coplanaires.

On $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}18\\-9\\9\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{0}{18} \neq \frac{2}{-9} \neq \frac{4}{9}$

donc (AB) et (CD) ne sont ni parallèles ni confondues.

Alors (AB) et (CD) sont coplanaires et sécantes → réponse (c)

3) $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

donc $\begin{pmatrix}x_K - 1\\y_K - 2\\z_K - 3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6\\3\\-3\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_K - 1 = \frac{1}{3}\times(-6) \\ y_K - 2 = \frac{1}{3}\times 3 \\ z_K - 3 = \frac{1}{3}\times(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = -2+1 \\ y_K = 1+2 \\ z_K = -1+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = -1 \\ y_K = 3 \\ z_K = 2 \end{cases}$

ainsi $K(-1;3;2)$ → réponse (b)

Exercice 3 $\quad T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ avec $k = -0,2$ et $M = 10$

1) La température du café va diminuer au fil du temps donc (T_n) est décroissante

2) D'après la loi de Newton, $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10) \iff T_{n+1} - T_n = -0,2T_n + 2$

$\iff T_{n+1} = T_n - 0,2T_n + 2 \iff T_{n+1} = 0,8T_n + 2$

3) a) (I) $T_0 = 80 \geqslant 10$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

(H) On suppose qu'il existe un rang $k \geqslant 0$ tel que $T_k \geqslant 10$ et on cherche alors à montrer que $T_{k+1} \geqslant 0$

or $T_k \geqslant 10 \iff 0,8T_k \geqslant 8 \iff 0,8T_k + 2 \geqslant 10 \iff T_{k+1} \geqslant 10$

donc la propriété est vraie au rang $k+1$

(ccl) : la propriété est vraie au rang $k = 0$ et elle est héréditaire donc pour tout entier n, $T_n \geqslant 10$

b) $T_{n+1} - T_n = 0,8T_n + 2 - T_n = -0,2T_n + 2$

or $T_n \geqslant 10 \iff -0,2T_n \leqslant -2 \Rightarrow -0,2T_n + 2 \leqslant 0$ ainsi $T_{n+1} - T_n \leqslant 0$

donc (T_n) est décroissante

c) (T_n) est une suite décroissante, minorée par 10 donc (T_n) converge

4) $u_n = T_n - 10$ d'où $T_n = u_n + 10$

a) $u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = 0,8T_n + 2 - 10 = 0,8T_n - 8 = 0,8(u_n + 10) - 8 = 0,8u_n + 8 - 8 = 0,8u_n$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de 1er terme $u_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70$

b) alors $u_n = u_0 \times q^n = 70 \times 0,8^n$ or $T_n = u_n + 10$ d'où $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$

c) $-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} 70 \times 0,8^n + 10 = 10$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 10$

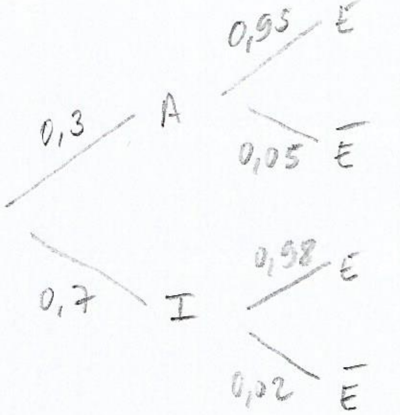
à long terme, la température du café va se stabiliser à 10°C

5) a) après exécution de l'algorithme, on obtient $n = 4$

b) La température du café deviendra inférieure à 40°C au bout de 4 minutes exercice 2

Ⓐ

1)



2) on cherche $p(\overline{E})$ or A et I forment une partition de l'univers et d'après la formule des probabilites totale,

$$p(\overline{E}) = p(A \cap \overline{E}) + p(I \cap \overline{E}) = p(A) \times p_A(\overline{E}) + p(I) \times p_I(\overline{E}) = 0,3 \times 0,05 + 0,7 \times 0,02 = 0,029$$

3) on cherche $p_{\overline{E}}(A) = \dfrac{p(A \cap \overline{E})}{p(\overline{E})} = \dfrac{p(A) \times p_A(\overline{E})}{p(\overline{E})} = \dfrac{0,3 \times 0,05}{0,029} = \dfrac{15}{29} \simeq 0,517$

Ⓑ X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(202\,;0,971)$

1) $p(X=202) = \binom{202}{202} \times 0,971^{202} \times (1-0,971)^0 \simeq 0,003$

donc la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement est 0,003

2) Si un seul client ne se presente pas à l'embarquement, alors 201 clients se presentent or $p(X=201) = \binom{202}{201} \times 0,971^{201} \times (1-0,971)^1 \simeq 0,0158 \simeq 0,016$

donc la probabilité qu'un seul client ne se présente pas à l'embarquement est 0,016

3) La compagnie est en situation de surréservation si plus de 201 clients se présentent à l'embarquement or

$$p(X \geqslant 201) = p(X=201) + p(X=202) \simeq 0,016 + 0,003 \simeq 0,019$$

donc la probabilité que la compagnie soit en surréservation est 0,019

remarque : $p(X \geqslant 201) = 1 - p(X \leqslant 200)$ et d'après la calculatrice $p(X \leqslant 200) \simeq 0,9816$

d'où $p(X \geqslant 201) = 1 - 0,9816 = 0,0184$