

Exercice 1

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. On a donc $u_1 = 1\,000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 250 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$.

2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.

Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans; une calculatrice donne $\approx 1\,977$.

4. a. *Initialisation* : on a $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$: la relation est vraie au rang 0;

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq 2\,500$.

La multiplication par 0,9 > 0 respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500$ ou $0,9u_n \leq 2\,250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :

$0,9u_n + 250 \leq 2\,250 + 250$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la relation est encore vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2\,500$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or d'après la question précédente : $u_n \leq 2\,500$, puis $0,1u_n \leq 0,1 \times 2\,500$ ou encore $0,1u_n \leq 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leq -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leq -0,1u_n + 250$.

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est croissante.

5. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500$, soit

$$v_{n+1} = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n.$$

L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,9^n = -1\,500 \times 0,9^n$.

$$\text{Or } v_n = u_n - 2\,500 \iff u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n.$$

6. a. $u_{20} = -1\,500 \times 0,9^{20} + 2\,500 \approx 2\,317$ donc dans 20 ans, soit en 2040, cette influenceuse aura 2 317 abonnés à son profil.

b. On peut raisonner par tâtonnement à l'aide de la formule de u_n , on a $u_{15} \approx 2\,191$ et $u_{16} \approx 2\,222$

ou programmer l'algorithme suivant qui renverra la valeur 16.

```
n = 0
u = 1 000
while u < 2 200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
return n
```

Ce qui signifie que le nombre d'abonnés dépassera 2 200 dans 16 ans, soit en 2036.